Cuadernos de Economía Vol. 13. 269-279. 1.985.

Teorema d'existència d'equilibri amb externalitats generades per la transformació pel consum.*

Anna Ma. Birulés i Bertran

Departamento de Teoría Económica.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Barcelona.
Avda. Diagonal, s/n – 08034 Barcelona

Dada una economía finita y de intercambio, con externalidades, se demuestra la existencia de equilibrio competitivo. Las externalidades son consecuencia de la actividad transformadora que los agentes llevan a cabo para consumir.

Esta actividad transformadora inherente al proceso de consumo se lleva a cabo mediante la producción doméstica, representada por una correspondencia tecnológica de consumo para cada agente.

En este artículo, además de la continuidad de la correspondencia tecnológica de consumo, se obtienen condiciones suficientes para la existencia del equilibrio competitivo con dichas externalidades.

In this article we show the existence of a competitive equilibrium in an exchange finite economy with externalities due to the transformation activity, done by the consumers in their consumption process.

We model that transformation activity with a domestic production economy together with a consumption technology correspondence, which we will show to be continuous. Then we find sufficient conditions for existence of a competitive equilibrium with the type of externalities mentioned above.

Aquest article correspón a un epígraf del capítol II de la meva tesi doctoral "Externalitats i Institucions", presentada a la Universitat de Barcelona (23.4.85).

I. Introduccio

L'objecte d'aquest article és la demostració de l'existència d'equilibri competitiu en una economia finita d'intercanvi amb externalitats que provenen de l'activitat transformadora que els agents realitzen per a consumir.

L'estudi de les condicions suficients per a l'existència d'equilibri amb externalitats es deu a McKenzie [1955], Arrow i Hahn [1971] i Arrow i Debreu [1954]. Encara que la formulació del teorema d'Arrow i Debreu no té com a finalitat l'estudi de les externalitats i, per tant, no les incorpora explícitament –cosa que fan McKenzie i Arrow i Hahn, encara que de distinta manera–, amb un tractament adequat permet demostrar l'existència d'equilibri amb externalitats.

En aquest article utilitzem el concepte d'economia abstracta de Debreu [1952] en la versió més general de Shafer i Sonnenschein [1975. b], que per a economies sense externalitats pot considerar preferències que no siguin completes o transitives. En economies amb externalitats permet que les preferències de cada individu no tan sols depenguin del seu propi consum sino també del consum dels altres i dels preus (Shafer i Sonnenschein [1975.a]). Per tant, queden excloses les externalitats tipus enveja, status, etc.

Ací, els agents econòmics intercanvien en el mercat sota condicions de competència perfecta, obtenint les mercaderies que utilitzaran com a recursos en el procés de transformació doméstica. Les preferències estan definides en l'espai dels béns resultat d'aquest procés. Per tant, per a cada individu **i** depenen dels bén que consumeix **i**, i dels consumits pels altres car determinen el nivell d'externalitats de l'economia.

L'efecte beneficiós o nociu de les externalitats en una economia d'intercanvi no té com a origen aquest, sino l'activitat de transformació inherent a l'acció de consumir, i que ací recollim mitjançant una producció domèstica representada per una correspondència, que anomenem, tecnològica de consum. Es la formulació explícita d'aquells processos de producció que estan implícits en la caracterització de les externalitats ambientals de consum, com pot esser el soroll, el fum, ...

Aquest tipus d'externalitats, resultat de l'activitat transformadora que duen a terme els consumidors, inclou com a cas particular, quan la correspondència tecnològica de consum és la identitat, aquelles economies, fins ara les més usuals en la literatura, en les quals les preferències estan definides primitivament en l'espai de mercaderies X.

II. MODEL

I és el conjunt finit dels consumidors, $\neq I = N$.

l els bens, $y \in R^{l}_{+}$

k les mercaderies, $x \in R^{l}_{+}$, $k \geqslant 1$.

X_i el conjunt de les mercaderies per l'agent i, $X_i \subseteq R^{k}_{+}$.

Y_i el conjunt de consum del béns de l'agent i, $Y_i \subseteq R^{l}_{+}$.

$\varphi_i: X_i \longrightarrow Y_i$ [1] la correspondència tecnològica de consum de l'agent i.

$P_i: \prod_{i \in I} Y_i \longrightarrow Y_i$, les preferències de l'agent i.

El consumidor i queda especificat mitjançant el seu conjunt de mercaderies, X_i, el seu conjunt de producció –béns–, Y_i, la tecnologia de consum, φ_i, i les preferències, P_i. El consumidor mitjançant el mercat demanda i ofereix mercaderies, que transforma en béns de consum utilitzant la tecnologia de consum. En aquest procés de producció domèstica es generen les externalitats, que són anònimes.

La dotació total inicial de recursos de l'economia, w, que és una dada donada, pertany a l'espai de mercaderies, $w \in R^{k}_{+}$. Aquests recursos –mercaderies– com tots, són transformables en béns mitjançant la tecnologia de consum, $\varphi_i(x_i) \subset Y_i$, $y_i \in \varphi_i(x_i)$, $x_i \in X_i$.

Com que hi ha externalitats com a resultat de l'activitat de consum, les preferències dels agents depenen no tan sols del seu consum sino també del consum dels altres. Si aquestes preferències són tals que

1. Utilitzem una fletxa amb dos caps per a indicar una correspondència.

es poden representar per una funció d'utilitat, $U_i : \prod_{i \in I} Y_i \quad R$, donat el consum dels altres agents $\overline{y}_{N/i}$ [2], el consumidor i té un ranking definit en els elements del seu propi conjunt Y_i. Llavors,

$$P_i(\overline{y}) = \left\{ y_i \in Y_i : U_i(y_i, \overline{y}_{N/i}) > U_i(\overline{y}_i, \overline{y}_{N/i}) \right.$$

Per tant, $\epsilon = ((X_i, Y_i, \varphi_i, P_i)_{i=1}^{N}; w)$ és una economia d'intercanvi amb externalitats.

Definició 1

El parell de vectors (x, y) és un equilibri de l'economia $\epsilon = ((X_i,$

$Y_i, \varphi_i, P_i)_{i=1}^{N}; w)$ si

(1) $(x_i, y_i) \in X_i \times \varphi_i(X_i), \forall_i$

(2) $\sum_{i=1}^{N} x_i = w$

(3) $\exists\, p \in \mathbb{R}_+^k$ tal que $\nexists\, (x_i', y_i')$ que compleixi

(i) $y_i' \in \varphi_i(x_i'), \forall_i$

(ii) $\sum_{i=1}^{N} x_i' = w$

(iii) $p \cdot x_i' = p \cdot x_i$

(iv) $P_i(y_i', y_{N/i}) \subseteq P_i(y_i, y_{N/i}), \forall i \in I$

$P_j(y_j', y_{N/j}) \subset P_j(y_j, y_{N/j})$

2. $Y_{N/i} = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_N)$.

III. TEOREMES

Per a demostrar el teorema d'existència necessitem uns lemes previs.

Lema 1

Siguin (1) X, Y dos cons, tancats i convexos (per a simplificar, suposem $Y = R^l_+$, $X = R^k_+$).

(2) $\varphi : X \to Y$ una correspondència tal que

(a) el seu graf $G_\varphi = \{(x, y) \in XxY : y \in \varphi(x)\}$, és tancat i convex.

(b) $0 \in \varphi(x), \forall x \in X$.

(c) $\varphi(0) = \{0\}$

(d) $\varphi(X) \cap \text{Int } Y \neq \emptyset$,

Llavors φ és una correspondència contínua (φ és hemicontínua inferiorment[3] i hemicontínua superiorment[3])

Observacions

– Per a demostrar que φ és contínua, cal demostrar que (i) φ és hci per a la qual cosa només necessitem els supòsits (1), (2a) i (2d), i (ii) φ és hcs.

– El supòsit (2b) permet la possibilitat d'inacció. Es a dir que donats uns recursos no es produeixi.

– El supòsit (2c) fa impossible l'existència d'externalitats en la producció. Si un agent no utilitza recursos per a produir, no obté cap mercaderia.

– El supòsit (2d) assegura que el conjunt φ (X) està ben definit en l'interior del conjunt Y.

– Pel supòsit (2a), φ (x) és un conjunt tancat i convex per a cada x que pertanyi al domini efectiu. De manera que la convexitat i el supòsit que $0 \in \varphi$ (x) elimina la possibilitat de rendiments creixents a escala per a la tecnologia de consum.

3. D'ara endavant "hemicontínua inferiorment" i "hemicontínua superiorment" s'abrejaran "hci" i "hcs", respectivament.

Demostració del lema 1

Primer demostrarem que (i) φ és hci i després que (ii) φ és compacte, és a dir que el conjunt φ (x) és compacte a Y, $\forall$ x, $x \in X$. Per tant tots els supòsits del següent lema de Hildenbrad [1974] es compleixen i la condició demostra que la correspondència φ és contínua.

Lema (Hildenbrand [1974])

Sia φ una correspondència definida d'un espai mètric M a R^l tal que el conjunt φ (x) és convex, $\forall$x, $x \in X$. Si φ és hci a $x \in M$ i φ (x) és tancat i compacte, llavors φ és contínua a x.

(i) φ és hci.

Hem de demostrar que per cada conjunt obert G, $G \subset Y$, el conjunt $\varphi^{-1}(G) = \{ x \in X: \varphi(x) \cap G \neq \emptyset \}$ és obert a X.

Suposem que no és cert, que φ^{-1} (G) no és obert. Això vol dir que $\partial \varphi^{-1}(G) \cap \varphi^{-1}(G) \longrightarrow$ és una intersecció no buida, existeix $x^* \in \partial \varphi^{-1}(G) \cap \varphi^{-1}(G)$. Com que el fet que el graf de φ és un conjunt tancat i convex implica que el graf de φ^{-1} també és tancat i convex, tenim que φ^{-1} (G) és un conjunt convex. Llavors podem trobar un conjunt obert i convex, θ, tal que $x^* \in \theta$ i $\forall$ x, $x \in \theta$, $\varphi(x) \cap G =$ $= \emptyset$ [*].

Per construcció, doncs, $\varphi(x^*) \cap G \neq \emptyset$. Sia y* un element d'aquesta intersecció, $y^* \in \varphi(x^*) \cap G$. Construïm un conjunt obert N pertanyent a G al voltant de y*, $N = \{ y \in G: d(y, y^*) < \delta \}$, on d(. , .) és la distància entre y i y*. Utilitzant [*] tenim que $\varphi(*) \cap N = \emptyset$, $\forall$ x, $x \in \theta$.

Sia un x qualsevol, $x \in \theta$ i $y \in \varphi(x)$. Com que N és un conjunt convex, tenim que per alguna λ, es complirà $y^* + \lambda(y - y^*) \in N$. Per altra banda, com que θ també és convex, llavors $x^* + \lambda(x - x^*) \in \theta$. Però sabem que $\varphi(x) \cap N = \emptyset$, x, $x \in \theta$ i en particular per l'element $(x^* + \lambda(x-x^*))$, $\varphi(x^* + \lambda(x-x^*)) \cap N = \emptyset$, que contradiu la convexitat de la correspondència φ. Llavors φ és hci.

(ii) φ (x) és un conjunt compacte a Y, $\forall x \in X$.

Suposem que φ (x) no és compacte. Llavors existeix una seqüència de conjunts tancats $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ tal que

$F_k \cap \varphi(x) \neq \emptyset$, per tot k i $(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k) \cap \varphi(x) = \emptyset$. Contradicció amb el supòsit que $0 \in \varphi(x)$, $\forall x$, $x \in X$ i amb el fet que $\varphi(x)$ és un conjunt tancat. I per tant, $\varphi(x)$ és un conjunt compacte a Y, $\forall x \in X$.

Hem demostrat que la correspondència φ és hci, tal que $\varphi(x)$ és un conjunt no només tancat i convex, sinó que a més és compacte. Llavors pel lema citat abans, φ és contínua.

Lema 2

Si els supòsits del lema 1 es compleixen i si existeix una funció d'utilitat, U_i: $Y \to R$ tal que és contínua en la variable y i quasicòncava en y_i, llavors la funció V_i: $X_i \times \prod_{j \neq i} Y_j \to R$ és un indicador representant les preferències de l'agent i respecte X_i, donades $y_{N/i}$ i V_i és contínua i quasicòncava en x_i.

Demostració del lema 2

Sia U_i^P la funció definida en el component i, és a dir a partir de la funció d'utilitat U_i: $Y \to R$ definim U_i^P: $Y_i \to R$ que és contínua i quasicòncava.

Definim la següent funció contínua,

$$(x_i, y_i) \to U_i^P(y_i), \text{ que anomenem } \tilde{U}_i^P$$

$\tilde{U}_i^P$: $X_i \times Y_i \to R$ és contínua i quasicòncava en y_i.

Llavors la maximització que l'agent i ha de resoldre és

$$\text{màx } \tilde{U}_i^P : X_i \times Y_i \to R \quad \text{tal que}$$

$$\varphi_i : X_i \twoheadrightarrow Y_i$$

i pel teorema del màximum com que $\tilde{U}_i^P$ és una funció contínua i φ_i és una correspondència contínua i tal que $\varphi_i(x_i)$ és compacte (pel lema

1), la correspondència μ_i (conjunt de màxims) és no buida (resultat de maximitzar una funció contínua en un conjunt compacte, $\varphi_i(x_i)$), hcs i de valor compacte. A més, com que φ_i és convexa i U_i quasicòncava en y_i, μ_i és una correspondència convexa.

Per tant $\tilde{U}_i^P$ (x_i, y_i^*) on $y_i \in \mu_i(x_i^*)$ és una funció de x_i i $V_i : X_i \times \prod_{j \neq i} y_j \rightarrow R$ està ben definida, és contínua i quasi-còncava en x_i.

Llavors $P_i : \prod_{j \neq i} y_j \times X_i \twoheadrightarrow X_i$ queden definides per

$$P_i(x_i, y_{N/i}) = \left\{ x_i' \in X_i : V_i(x_i', y_{N/i}) > V_i(x_i, y_{N/i}) \right\}$$

Teorema

Sia $\epsilon = ((X_i, Y_i, P_i, \varphi_i) : w)$ una economia que satisfà tots els supòsits del lema 1 i tal que

(1) Els conjunts X_i són tancats, convexos no buits i acotats inferiorment.

(2) Les correspondències de preferència, P_i, són irreflexives [$x_i \notin P_i(x_i, y_{N/i})$], el seu graf és obert i els seus valors són conjunts convexos i no buits.

(3) $W_i(p) >$ inf $p. X_i$, per tot $p \in P$, $\forall i$.

(4) Si $x_i' > x_i$ llavors $x_i' \in P_i(x_i, y_{N/i}), \forall i$,

llavors l'economia ϵ té un equilibri (x^*, y^*) relativu al sistema de preus, p^*.

Observacions

– El supòsit (3) és el de subsistència.
– El supòsit (4) expressa la condició de monotonia de les preferències P_i en l'espai X_i.

Demostració del teorema

Utilitzant el concepte d'economia abstracta, que generalitza el de joc, introduït per G. Debreu [1954], en la versió més general de Shafer-Sonnenschein [1975, b], associarem a l'economia ϵ una economia abstracta, N + 1.

Per tots els agents i = 1, . . ., N + 1 definirem les correspondències $\hat{P}_i$, $\hat{P}_i$: $\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \in I} Y_i \times P \twoheadrightarrow X_i$, on X_i, Y_i, i = 1, . . ., N satisfan els supòsits del teorema i P és el conjunt dels preus, a partir de les correspondències P_i.

Mitjançant $V_i: X_i \times \prod_{j \neq i} Y_j \rightarrow R$ definim una altra funció que és contínua i que anomenem V'_i,

$$(x_i, x_{N/i}, y_i, y_{N/i}, p) \rightarrow V_i(x_i, y_{N/i})$$

$$V'_i: \prod_{i \in I} X_i \times \prod_{j \in I} Y_j \times P \rightarrow R, \text{ i per tant } P_i: X \times Y \times P \twoheadrightarrow X_i,$$

i = 1, . . ., N és tal que

$$\hat{p}_i(x, y, p) = \left\{ x'_i \in X_i : V'_i(x'_1, x_{N/i}, y, p) > V'_i(x, y, p) \right\}, \text{ essent}$$

$$X = \prod_{i \in I} X_i, \; Y = \prod_{i \in I} y_i, \; x = (x_i, x_{N/i}), \; y = (y_i, y_{N/i}).$$

Per tant, l'economia abstracta $\Gamma = (X_i, Y_i, \hat{\beta}_i, \hat{P}_i)_{i=1}^{N+1}$ que hem associat amb ϵ queda caracteritzada per N + 1 quàdruples ordenats $(X_i, Y_i, \hat{\beta}_i, \hat{P}_i)$ on

$\forall$i, i = 1, . . ., N

(1) $\hat{P}_i: X \times Y \times P \twoheadrightarrow X_i$ definida per $\hat{P}_i(x, y, p) \equiv P_i(x_i, y_{N/i})$

(2) $\hat{\beta}_i: X \times Y \times P \twoheadrightarrow X_i$ definida per $\hat{\beta}_i(x, y, p) = \left\{ x_i \in X_i : px_i \leqslant W_i(p) \right\}$ essent $\hat{\beta}_i(x, y, p) \equiv \beta_i(p) = \left\{ x_i \in X_i \subseteq R^k_+ : px_i \leqslant W_i(p) \right\}$, correspondència que, sota el supòsit (3), és contínua. A més, com que $\beta_i(p) = \beta_i(\lambda p)$ per a alguna $\lambda > 0$, podem pren-

dre el símplex $P = \left\{ p \in R^k_+ : \sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \right\}$ com el nostre espai de preus. Per tant β_i és una correspondència de P a X_i.

Per a N + 1,

(3) $\hat{P}_{N+1}: X \times Y \times P \to\to X_{N+1}$ definida per $\hat{P}_{N+1}(x, y, p) = \left\{ p \in X_{N+1} : p\, \Sigma x_i - \Sigma W_i(p) > 0 \right\}$ essent $X_{N+1} \equiv P$.

(4) $\hat{\beta}_{N+1}: X \times Y \times P \to\to X_{N+1}$ definida per $\hat{\beta}_{N+1}(x, y, p) \equiv P$ per a tot (x, y, p).

Debreu ([1959] pp. 77–8, 84-5) demostra que tots els consums factibles $x_i \in X_i$ d'una economia que satisfà el supòsit (1) del teorema, estan continguts en l'interior d'un cub K que és compacte. Per tant, podem construir una economia truncada que correspon a Γ, on substituïm $X_i, \forall_i$, i = 1, . . ., N, per $X_i \cap K = \tilde{X}_i$ i Y_i per $\tilde{Y}_i = \varphi_i(\tilde{X}_i)$, de manera que $\tilde{X}_i$, $\tilde{Y}_i$ són compactes.

Per tant, es satisfan totes les condicions, dels següent teorema de Shafer–Sonnenschein [1975.b] que generalitza l'existència d'equilibri per a les economies abstractes quan les preferències no són completes o transitives.

Teorema (Shafer, W. i H. Sonnenschein [1975.b]

Sia $\Gamma = (X_i, A_i, P_i)_{i=1}^{N}$, una economía abstracta que satisfà, per a tot i,

(a) X_i és un conjunt no buit, compacte, convex i subconjunt de R^l.
(b') A_i és una correspondència contínua.
(b'') Per a cada x ∈ X, $A_i(x)$ és un conjunt no buit i convex.
(c') El graf de P_i és un conjunt obert a X x X_i, i
(c'') Per a cada x ∈ X, $x_i \notin H(P_i(x))$ on H (A) representa la intersecció de tots els conjunts convexos que contenen A.

Llavors l'economia abstracta Π té un equilibri.

Tenim, doncs, que existeix un equilibri,

$$(x^*, y^*, p^*) \in \prod_{i \in I} \tilde{X}_i \times \prod_{j \in I} \tilde{Y}_j \times P,$$

$$\text{de l'economia } \tilde{\Gamma} = (\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i, \tilde{\beta}_i, \tilde{P}_i)_{i=1}^{N+1},$$

és a dir, per a cada i, $x_i^* \in \beta_i(p^*)$ i $\beta_i(p^*) \cap P_i(x_i^*; y_{N/i}^*) = \emptyset$,

$i = 1, \ldots, N$ i com que $p^*, x_i^* \leqslant W_i(p^*)$, llavors $\hat{P}_{N+1}(x^*, y^*, p^*) = \emptyset$.

Ara, hem de comprovar que efectivament (x^*, y^*) és un equilibri relatiu al preu p^*, de l'economia ϵ.

La condició (1) de la definició 1 es compleix per construcció, ja que

$$y_i \in \mu_i(x_i), \forall x_i \quad \text{i per tant } y_i^* \in \mu_i(x_i^*) \text{ i } y_i^* \in \varphi_i(x_i^*).$$

Per monotonia i com que $x_i^* \in B_i(p^*)$, $B_i(p^*) \cap P_i(x_i^*, y_i^*) = \emptyset$, tenim que $p^* x_i^* = W_i(p^*)$. A més $p^* > 0$, i per tant $p^* \sum_{i \in I} x_i^* =$ $= p^* w$ implica $\sum_{i \in I} x_i^* = w$, que és la condició (2).

Suposem que existeixi un parell (x_i', y_i') tal que $y_i' \in \varphi_i(x_i')$, $p^* x_i^* = p^* x_i'$ i és preferit per a algun i. Si $x_i' = x_i^*$, $y_i' \neq y_i^*$, llavors $y_i' \in \varphi_i(x_i') = \varphi_i(x_i^*)$ que contradiu $y_i^* \in \mu_i(x_i^*)$. Si $(x_i', y_i') \neq (x_i^*, y_i^*)$ llavors $x_i' \in B_i(p^*)$ i $x_i' \subset P_i(x_i^*, y_{)i(}^*)$ que contradiu $B_i(p^*) \cap P_i(x_i^*, y_{)i(}^*) = \emptyset$. Per tant, es compleix la condició (3).

4. $y = (y_i, y_{N/i})$, $y \in Y = \prod_{i \in I} Y_i$.

Per tant, hem demostrat que l'equilibri competitiu existirà per a aquelles economies d'intercanvi amb externalitats generades per la transformació domèstica que requereix el consum, amb preferències definides sobre tot l'espai de consum, que satisfan les condicions del lema 2 i del teorema. L'existència d'equilibri competitiu amb externalitats sense transformació de consum, queda demostrada pel cas particular en el qual la tecnologia de consum és la identitat.

REFERENCIES BIBLIOGRAFIQUES

ARROW, K. i G. DEBREU [1954]. "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", Econometrica, 22, 265–290.

ARROW, K. i F. HAHN [1971]. General Competitive Analysis. Holden-Day, San Francisco.

DEBREU, G. [1952]. "A Social Equilibrium Existence Theorem" Proceedings of the National Academy of Sciences of U.S.A., 38, 886–893.

DEBREU, G. [1959]. Theory of Value, New York: John Wiley and Sons.

HILDENBRAND, W. [1974]. Core and Equilibria of a Large Economy, Princeton University Press.

SHAFER, W. i H. SONNENSCHEIN [1975.a]. "Some Theorems on the Existence of Competitive Equilibrium", Journal of Economic Theory, 11, 83–93.

SHAFER, W. i H. SONNENSCHEIN [1975.b]. "Equilibrium in Abstract Economies without Ordered Preferences", Journal of Mathematical Economics, 2, 345–348.